

数学的活動を充実させる数学科教材の開発[†]

和久井達也*・酒井 一博**・日野 圭子**

宇都宮大学大学院教育学研究科（現、野木町立野木中学校）*

宇都宮大学教育学部**

本研究の目的は、具体物を用いた数学的活動を通して、生徒が事象を数理的に考察する能力と態度を培うことができる教材の開発を行い、授業実践と省察から、その有効性を検証することである。中学校第2学年「1次関数」を題材とし、学習指導要領の目的に則し、具体物として「竿秤」を用いた操作的・実験的な数学的活動を基に、「竿秤」に隠された数学的性質を探究する活動を通して、生徒が事象を数理的に考察するプロセスを追体験する機会を取り入れた。

授業実践の結果、数学的活動を取り入れる際、具体的なものを与えることでより生徒の学習意欲が喚起されるとともに、主体的な学習が促され、生徒が事象を数理的に考察するプロセスを追体験するうえで、良い影響を与えることがわかった。

キーワード：教材開発、意欲、数学科教育、学習指導要領、数学的活動、具体物

1. はじめに

平成20年に告示され、平成24年度から中学校で完全実施される学習指導要領（以下、新学習指導要領¹⁾）では、数学科の目標を「数学的活動を通して、図形や数量などに関する基礎的な概念や原理・法則についての理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を知り、事象を数理的に考察し表現する能力を高めるとともに、数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し、それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる。」と定めている。ここでは、「事象を数理的に考察し、・・・態度を育てる」と示されているように、子どもたちの主体的な学習が求められている。

また、平成22年度全国学力学習状況調査²⁾における中学校第3学年を対象とした質問紙調査では、図1のような結果が得られている。ここでは、日本の中学生は数学の勉強は大切で、できるようになりたいと考えてはいるが、身の回りの物事を数学的に見たり、数学を活用したりという意識が低いという結果が得られた。

そこで授業では、ある事象について観察・操作・実験をすることを通して、その事象に隠された数学的性質を探究する機会を与えることにした。より現実的な場面に利用されるものや、具体的な事象を用いることで、生徒は興味・関心を抱き、主体的に探究しようという学習意欲を喚起することができると考えられるからである。さらに、具体物に隠された数学的性質を探究し、数学的に表現するという活動こそが、事象を数理的に考察することであり、この経験が生徒の事象を数理的に考察する能力と態度の育成にも繋がると考えられる。

この仮説を基に、本研究では、数学的活動をキーワードとし、数学的活動に着目して行われている授業や、そこで用いられている教材等を学び、数学的活動を充実したものにする教材の開発を進めていく。

本研究を進めることによって、次の4つの効果を期待している。

- ① 数学的技能や表現の有用性を高める
- ② 数学的な考え方の育成
- ③ 具体物を用いることによる数学的活動への意欲の向上
- ④ 理数教科に対する関心・意欲の向上

[†] Tatsuya WAKUI*, Kazuhiro SAKAI** and Keiko HINO**: Development of mathematics teaching-materials for enriching mathematical activity

* Graduate School of Education, Utsunomiya University

** Faculty of Education, Utsunomiya University

感得しやすくなることが分かった。

- ・ 疑問の持たせ方を工夫したことで、生徒が主体的に取り組むことができた。
- ・ 振り返りによって思考が深まり、身近な事象に活用する意欲がわいてくることが分かった。

以上の結果から、研究から得られた成果として以下の3点を挙げている

- 算数・数学的活動の必要性和意義の理解
- 算数・数学的活動を取り入れた授業を構成するときの視点の明確化
- 算数・数学的活動を取り入れた授業の実践

これらを踏まえ、数学的活動を充実させる一つの手段として、日常事象などのより具体的な事象に関連した数学的活動が有効であると考えた。以降では、これを参考にした、数学的活動を充実させる数学科教材の構想とその実践について示す。

3. 授業実践の概要

(1) 具体物を用いる意義

飯島⁶⁾は、「ふつう、算数・数学では教師も生徒も、他人から与えられたものを与えられた方法で考えさせられていることが多く、算数・数学では問題解決が大切であるといいながら、問題を見つけるという一番大切なことでは苦労していないことになる」と、矛盾点を指摘している。さらに「単に数学の内容、事柄の理解に留まるのではなく、それらを通して研究の方法を学ぶというのであれば、定理を予想したり発見したりすることはきわめて大切なことであり、それをどう証明するかを含めて、その構想を立てることは重要なことである。実験を取り入れることによって、まず定理を作りだし、発見していくことを子どもに経験させることができ、その定理を作り出す過程を経験したり、理解すること自体が証明の手がかりを与え、更なる発展への見通しを与えるものである。」とも述べている。

また、つねに抽象をより高度のものにすることにより、より一般性のあるものを追及するという数学の特殊性と関連付け、飯島は、「観察・実験によって得られたデータから、法則や定理が導き出されること、つまり具体的なものがあってこそ抽象が得られるのであり、実験はその具体を形成する一つの重要な方法である」と、実験の必要性を述べている。本研究ではこの考えに則し、具体物を生徒に与えることによって、上述の数学的活動が充実すると考えた。

(2) 教材

京極⁵⁾は、「竿秤」を用い、中学校2年生の選択数学受講者を対象とし、授業を実践している。本研究では、この実践例を参考とし、通常の数学の授業の中で実践できるよう配慮した。

「竿秤」とは、古くから利用されてきた秤の一種である。本授業実践で使用する竿秤を図2に示す。材料は厚さ0.59mmの板目紙を用い、幅30mm、穴数38となるよう作製した。本実践では、材質(重さ)の異なる2種類の竿秤を、異なる厚さの竿秤を製作し、重さの違いを表現した。

これら2種類の竿秤は、板目紙を切り出し、1枚の厚さのものと2枚貼り合せた厚さのものである。授業ではこれら2種類を用い、それぞれの竿秤について比較・検討を行う。

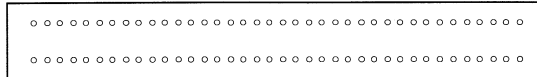


図2 製作した竿秤の模式図

中学2年生の1次関数やその利用を学習する題材では、品物の数とその代金や、水道の蛇口から浴槽に水を入れる時間と浴槽にたまる水の深さ等が取り上げられることが多い。それに対し、竿秤に隠された関数関係を導くためには、実験データを表やグラフに表したり、最終的には式表示して関係を明らかにする必要がある。これはまさに関数的な考えといえる。これより、竿秤は関数的な考えを指導するのに優れた題材であると考えられる。

(3) 学習目標と数学的活動

本授業実践では、竿秤を操作する活動を通して、次の①～③の3つの学習目標を定めた。

- ① 依存関係にある2つの数量関係(荷重の個数と支点から分銅までの距離)の変化や対応を調べ、生徒自身が定数を決定し、関係を1次関数の式に表現する。
- ② 支点の位置が同じでも竿秤の材質が異なる場合、定式化すると1次関数の切片が異なることに気付く。
- ③ 竿秤が同じ材質でも支点の位置が異なる場合、定式化すると1次関数の傾きが異なることに気付く。

ここでは、実際に生徒が竿秤を操作し、「荷重の個数」と「支点から分銅までの距離」の関係を調べ、

竿秤の中に隠された関数関係を生徒自らが発見することを第一の目的とした。

前述のとおり、本授業実践の要点は、生徒が具体物を操作し、そこに潜む数学的性質を探索することで、事象を数理的に考察するプロセスを経験することである。そこで、竿秤という具体物を用い、生徒自身が操作を行うことで、図 3 のように x : 「竿秤の荷重の個数」と y : 「支点から荷重までの距離」が 1 次関数の関係にあることを『見いだす活動』を取り入れた。

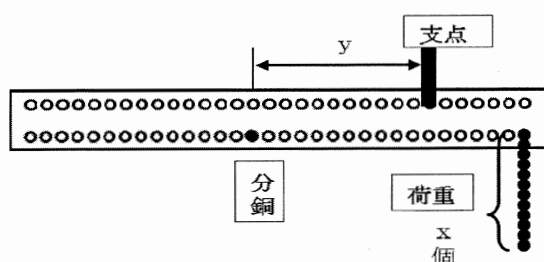


図 3 竿秤の実験の様子

新学習指導要領では、第 2 学年における関数分野の目標を「具体的な事象における 2 つの数量関係の変化や対応を調べることを通して、1 次関数について理解するとともに、関数関係を見だし表現し考察する能力を養う」と示している。ここに示されるように、本来ならば、依存関係にある 2 つの数量関係を生徒自身が発見することが関数指導において養われるべき能力であるだろう。しかし、これまで依存関係にある 2 つの数量関係を発見した経験がない生徒にとって、生徒自ら発見するのは難しいのではないかと考え、「竿秤の荷重の個数」と「支点から荷重までの距離」という 2 つの数量を、こちらから提示することにし、それらが 1 次関数の関係にあることを、竿秤の操作・実験をもとに、生徒に見出させることにした。

また、本授業実践では見出した関数関係を基に、これと具体事象を深めていく機会を設ける。具体的には、まず支点の位置が同じ竿秤で、材質（厚さ）が異なる 2 種類の竿秤を比較する。さらに、材質（厚さ）が同じ竿秤で、支点の位置が異なる 2 種類の竿秤を比較する。この活動もとに、それぞれの得られたデータや表した関数関係の式などの違いについて考えさせ、傾きや切片が具体物の何に依存しているのかを考察させる。これによって具体物と 1 次関数

の式が結び付き、得られた関数関係の考えを深めることができる。

その際、生徒一人で比較するだけでは、発見できないことが予想される。そこで本実践では、小集団内で見出した関数関係の式の中の傾きや切片などの数学的表現を用いて、互いに伝え合う活動を行わせることで、知識の補充を促していく。

(4) 授業実践の概要と生徒の実態

実施校：宇都宮市立 I 中学校

実施日時：平成 23 年 10 月 24 日～10 月 28 日

対象：第 2 学年 全 4 学級（全 122 名）

授業時数：各学級 2 時間

授業題目：「竿秤に隠された関係を見つけよう！」

内容：1 次関数の利用

I 中学校の生徒たちの授業態度は良好で、授業開始時からほとんどの生徒が顔をあげ、教師の説明をよく聞き、集中して授業に参加している生徒が学級のほとんどを占めている。教師が「隣同士で答えを確認してごらん」や「隣の人に教えてあげてね」というと、隣同士で教え合うなどの姿も見受けられた。これに対して、各学級 2、3 人程度であるが、授業中にも関わらずノートを開かなかったり、机に突っ伏していたりなど、授業に対して前向きでない生徒も各学級で見受けられた。

こういった生徒の実態を踏まえ、前述の通り、学級を小集団に分け、各小集団で行う活動を導入した。

(5) 授業実践の結果と省察

生徒が記入したワークシートの結果を述べる。また、本項では、その結果を踏まえ、生徒のアンケートや I 中学校の先生方からいただいたご指導などを基に本授業実践を省察する。

ワークシート（1）「荷重の個数 x 個と支点から分銅までの距離 y について下の表を完成させよう」に生徒が記入した実験結果を調べ、すべての生徒を、以降 A) ～C) の 3 グループに分類した。

また、ワークシート（2）自分たちの班の 2 種類の表や、表した式を比べて気付くことを書いてみよう（支点の位置や竿秤の厚さに注意して考えてみよう）。と、（3）他の班の 2 種類の表や、表した式を比べて気付くことを書いてみよう（支点の位置や竿秤の厚さに注意して考えてみよう）。では、説明し伝え合う活動において、目標②、③の到達がどの段階でできているかを調べるため、図 4 のような形式とした。このワークシートの記述内容から目標②、③

に到達していると読み取れる記述内容を集計し、(各グループの生徒数) ÷ (目標②または③の記述内容を記入している生徒数) × 100 として算出した。以降の円グラフはその数値をグラフ化したものである。

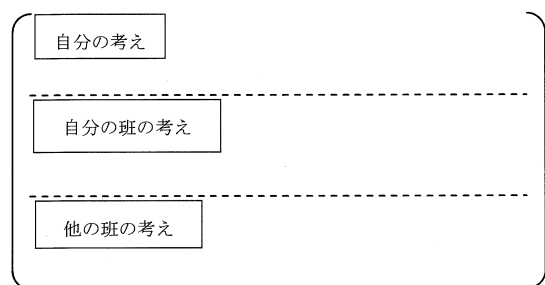


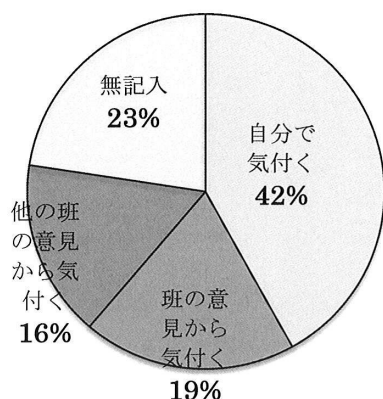
図4 ワークシート(2)、(3)記入欄

A) 誤差なくデータをまとめているグループ

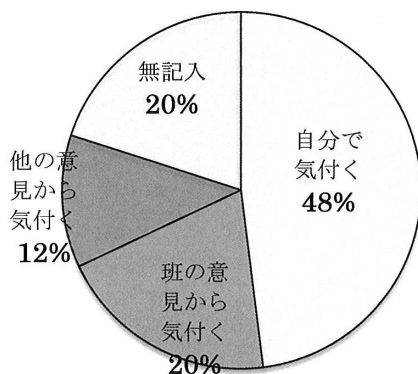
29名

誤差なく実験データを表にまとめることができたグループを、Aグループとした。このグループは関

目標②を達成している生徒



目標③を達成している生徒



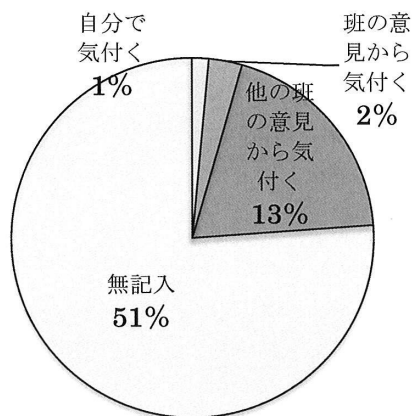
数関係の見取りやすいデータとなっており、また支点から荷重までの距離と変化の割合が一致している。誤差なくデータを取ることができたAグループにおいて、自分で目標の②、③に到達できた生徒は約4割～5割いることがわかる。また、自分で到達できなかったとしても、班の中の意見交換や他の班の発表を聞き、目標に到達している生徒の割合も高い割合を示している。これらの割合の合計が、学習目標②に関しては77%、学習目標③に関しては80%であった。これまでに事象を考察するプロセスを経験したことのない生徒であることを考えると、この学習目標到達率は高い割合を示しているといえる。

B) 誤差は出てしまったが関数関係の見とれるデータをまとめている生徒

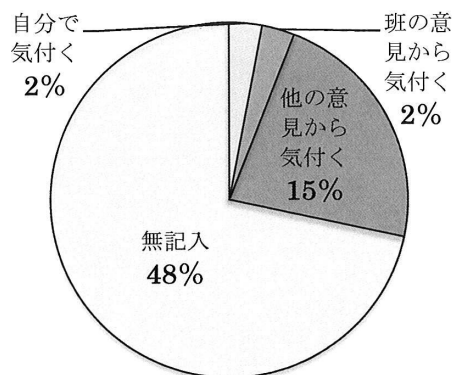
67名

誤差は出てしまったが関数関係の見とれるデータを得たグループをBグループとした。変化の割合が一定となっているため、一見誤差がないように見え

目標②を達成している生徒



目標③を達成している生徒

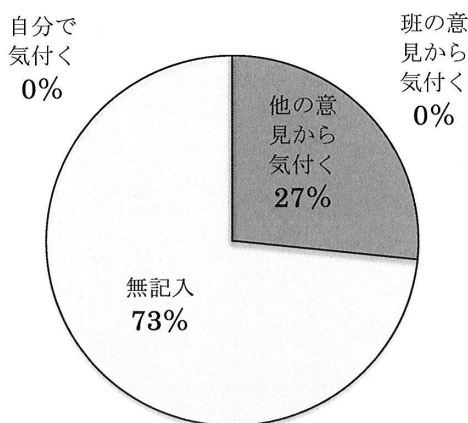


るが、A グループのように変化の割合と支点から荷重までの距離が一致していないため、誤差が出たデータとした。B グループの結果はA グループと比べ、自分で気付いた生徒と班の意見から気付いた生徒の割合が大きく減少している。B グループの結果は関数関係が見とれるデータが取れてはいるが、変化の割合と支点から荷重までの距離が一致しなかった。このことから、学習目標③への到達は特に難しくなってしまった。学習目標②に到達した生徒の割合の合計は 16%、学習目標③へ到達した生徒の割合の合計は 19%という数値になっている。

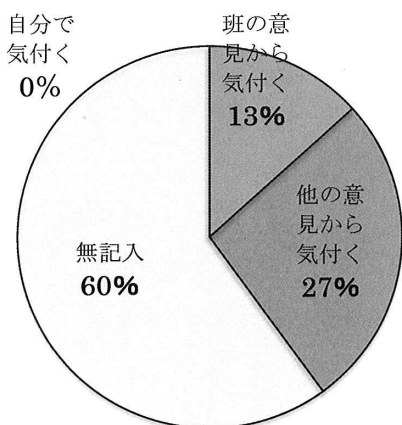
C) 誤差が多く関数関係の見とれないデータをまとめている生徒 17 名

誤差が多く出てしまったグループを C グループとした。このグループの結果からは、関数関係が見と

目標②を達成している生徒



目標③を達成している生徒



れないことから、以後の結果でも示すが、生徒の学習目標への達成率は低くなってしまった。誤差が出てしまい、関数関係の見とれないグループを C グループとした。この結果からわかるように C グループでは自分で気付けた生徒、班内の意見交換から気付けた生徒はほとんどいなかった。他の班の意見から気付くことからできた生徒に関しては、どちらも 27%であるが、人数としてはごく少数である。

授業後には、本授業実践に対するアンケート調査を行った。その結果、各設問において、非常に高い割合で肯定的な回答を得ることができている。各設問と回答、回答の割合は以下の通り。

設問 6 「自ら進んで授業に参加できましたか」

「できた」 76.9%
「できなかった」 23.1%

設問 7 「班で協力して学習できましたか」

「できた」 83.7%
「できなかった」 16.3%

設問 8 「竿秤の荷重の個数と支点から分銅までの距離の間に、1 次関数の関係があることが理解できましたか」

「できた」 86.5%
「できなかった」 13.5%

設問 9 「竿秤の支点から荷重までの距離が、1 次関数の式の比例定数になっていることは理解できましたか。

「できた」 88.5%
「できなかった」 11.5%

設問 10 「竿秤の厚さが、1 次関数の式の切片部分に影響することは理解できましたか

「できた」 89.4%
「できなかった」 10.6%

設問 11 「今回の竿秤を使った授業は楽しかったですか。次のどちらかに丸を付け、また、それはどんなところか書いてください。」

「楽しい」 85%
「楽しくなかった」 15%

この結果からは、設問 6、設問 7 では授業に対する自分自身の取り組みと、自分が所属する小集団での取り組みを自己評価させたところ、それぞれ 76.9%、83.7% と非常に高い割合を得ていることが分かる。このことから、竿秤という具体物を用いた数学的活動によって、生徒個人、または小集団での学習意欲が喚起されたのではないかと考えられる。しかし、授業中の各小集団の活動からは、小集団内の人間関係が希薄な構成となると、活動がうまく進んでいない様子も見受けられた。

問 8～問 10 では、学習目標に関する達成率を調査している。これら 3 つの設問においても、約 8 割～約 9 割と非常に高い割合を得ている。

また、設問 11「今回の竿秤を使った授業は楽しかったですか。次のどちらかに丸を付け、また、それはどんなところか書いてください。」で「楽しかった」と記述した生徒の記述内容は、次の 2 つに分けることができた。

① 竿秤の操作を楽しんでいると感じている記述内容

- ・ 実際に取り組んでやったので、頭にも残るのでよかった。
- ・ 実際に竿秤を使って確かめることができた。
- ・ 竿秤を一定にするようにはかったところ。

など

② 班で協力して活動したことが楽しいと感じている記述内容

- ・ みんなで話しあって、問題を解くのが楽しかった。
- ・ 班と協力して、ちょっと難しい問題を解くところ
- ・ 班のみんなと話し合い、結果（いろいろな考え方）をだしたところ

など

設問 11 では、「楽しかった」と回答した生徒が 85%にも達している。このことから多くの生徒が竿秤の操作を楽しんでいることがわかった。特に、「実際に取り組んでやったので、頭にも残るのでよかった」という生徒の記述から、具体物を使ったことがこの生徒に強い印象を与えることができたといえる。また、「実際に竿秤を使って確かめることができた。」や「竿秤を一定にするようにはかったところ。」という生徒の記述からは、竿秤を操作し、実験することによって、荷重の個数と支点から分銅まで

の距離に関数関係があることを発見し、生徒なりに仮説を立てたり、類推しながら実験を進めていたことがわかる。

「楽しくなかった」と記述した生徒の自由記述欄には、

- ・ 計測結果が正確じゃなかったから
- ・ うまく理解できなかった
- ・ グループでの活動があまりうまくいかなかった
- ・ 数学が好きじゃないから

これらに類似する内容が主であった。特に、「うまく理解できなかった」という回答と「計測結果が正確じゃなかった」という回答は大きく影響していると考えられる。実験において、実験誤差が出てしまったことで、1 次関数の式に表せない生徒多く、混乱している様子が見受けられた。

グループ活動に関しても、今回は、座席の近い任意小集団という形式をとったため、各小集団間で実験や説明し伝え合う活動に差が見られたことが影響していると考えられる。

4. 本研究のまとめと今後の課題

数学的活動を充実させる教材の構想を練り、その実践を行った結果、以下のことが実証できた。

- ・ 具体物を用いた、操作的な教材が生徒の実験へ取り組む意欲を湧き上げさせ、学習意欲を喚起できる。
- ・ 操作的、実験的な活動によって生徒は楽しく授業に参加することができる。
- ・ 「既習の数学を基にして、生徒が数や図形の性質などを見だし、発展させる活動」を行う際、具体物があることで事象と数学を結びつけることができる。
- ・ 自ら目標を達成できなかった生徒も「数学的な表現を用いて、根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動」によって、新たな発見ができる。

以上のことから数学的活動を充実させるためには、具体物を用いることは有効であるといえる。具体物を用いることによって、課題が明確化され、さらに生徒の学習意欲が喚起される。特に、数学を苦手とする生徒にとっても、具体物の操作や実験を小集団

での活動を通して行うことで、数学の授業そのものも楽しいと思えることが、アンケートの記述内容から分かっている。生徒にとって楽しい授業が行われるということも教材の開発を行う視点として非常に重要である。また、数学を得意とする生徒にとっても、これまで得てきた数学の知識が実用できるということから、どの生徒にとっても数学的活動のある数学の授業は魅力のある授業であると考えられる。最後に、本授業実践で得られた課題として、次の 3 点を挙げておく。

- ・ 具体物から数学を見いだす、小集団で意見交換させる際の発問の工夫。

特に、得られたデータから立式し、それらをもとに具体物を考察していく場面での発問に悩まされた。実践の中では、どんなに些細なことでも生徒の発見として尊重したいと考え、あえて抽象的な発問を行ったが、実際には、何をすればよいのかわからないという状況を作ってしまった。生徒に気づいてほしい点を、生徒が気付けるような具体的な発問を研究する必要がある。

- ・ 小集団の構成。

本実践では、それぞれの学級の実態がわからなかったことから、座席の近い 4 名もしくは 5 名の任意の小集団で授業を進めた。そのため、小集団内や小集団間で活動の差が見られ、特に、小集団間の学力のばらつきや生徒同士の人間関係は活動の進度に大きく影響していた。そういった影響もあり、生徒の発見や授業内容の理解にも差が見られた。今後、説明し伝えあう活動を小集団で行う際には、こういった点にも留意する必要がある。

- ・ 実験誤差についての指導。

本実践では、1 次関数の指導に実験を取り入れたため、当然のように実験誤差が表れた。しかし、誤差を生まないための測定や、誤差が生まれてしまった際、どのようにその誤差を処理するかという指導が足りなかった。このことが第 4 章の結果で示したように、誤差によって生徒の理解に差が表れた一因となったと考えられる。関数指導に実験を取り入れる際は、実験誤差をどのように防ぐか、また、どのように処理するかという指導を明確にする必要がある。

実際の授業においては、生徒の学力や小集団の構成など、生徒の実態を明確につかみ、それを踏まえた発問や、小集団の構成とすることが大切である。これらを確実に行っていくことで、より授業の中で数学的活動が充実し、事象を数理的に考察する能力と態度の育成が効率よく行われることが分かった。また、先に述べたような点を行っていくことで、実際の教育現場での実践が可能であると考えられる。

5. 謝辞

本研究における授業実践を行うに当たり、貴重な時間を作ってくださった宇都宮市立 I 中学校の先生方、また事前の模擬授業から当日の準備等、様々な面でご協力いただいた数学教育専修の大学院生に感謝の意を表します。

注及び参考文献

- 1) 中学校学習指導要領，文部科学省，2008.
- 2) 中学校学習指導要領解説数学編，文部科学省，2008.
- 3) 全国学力学習状況調査，
http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/gakuryoku-chousa/.
- 4) 京極邦明，「新数学的活動を促す授業を求めて 目標から評価まで「22 の物語」」，明治図書，2008，pp5 - 13，pp25 - 30，pp57 - 62，pp90 - 96.
- 5) 田中泰徳，「算数・数学的活動を取り入れた授業の工夫」，平成 22 年栃木県教育研究発表大会資料，2011.
- 6) 飯島康夫，「算数・数学に取り入れる実験の意義」，日本数学教育学会誌数学教育論究 vol.49・50，1987.